Σύνοψη

1. Η μέθοδος χρησιμοποιείται για γενικές συνθήκες της f (απαιτείται η συνέχεια)
2. Συγκλίνει πάντα όταν μπορεί να εφαρμοστεί
3. Μπορούμε να ξέρουμε apriori το πλήθος των βημάτων που εξασφαλίζουν την προσέγγιση της ρίζας με δεδομένη ακρίβεια.
4. Συγκλίνει αργά και έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος

Επαναληπτικές μέθοδοι

Βασική ιδέα: Ξεκινώντας από ένα x_0 να υπολογίζουμε μια ακολουθία προσεγγίσεων $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αναδρομικά $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$

Γράφουμε την εξίσωση $f(x)=0$ με ισοδύναμο τρόπο ως $x=\varphi(x)$ (υπάρχουν πολλοί τρόποι)

Παράδειγμα: Αν $g(x)>0$ ή $g(x)\neq 0$ $\forall x$

$$f(x)=0 \iff g(x)f(x)=0 \iff g(x)f(x)+x=x$$

δηλαδή $x=\varphi(x)=f(x)g(x)+x$

Σταθερό σημείο: Ένα σημείο x^* στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης φ καλείται σταθερό σημείο της φ αν $\varphi(x^*)=x^*$

Παράδειγμα: Η $f(x)=x$ όλα τα σημεία της f είναι σταθερά

Έστω η ακολουθία που παράγεται από τη σχέση $x_{n+1}=\varphi(x_n)$. Θεωρώ ότι η ακολουθία συγκλίνει και x^* είναι το όριό της. Υποθέτω ότι η $\varphi(x)$ είναι συνεχής.

Ερώτηση: Είναι και το x^* σταθερό σημείο της φ?

$$x^* = \lim x_{n+1} = \lim \varphi(x_n) \underset{\text{συνέχεια}}{=} \varphi(\lim x_n) = \varphi(x^*)$$

Απάντηση: Ναι είναι σταθερό σημείο της $\varphi(x)$

Ύπαρξη σταθερού σημείου

Κάθε συνεχής συνάρτηση $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο

Απόδειξη
a) $\varphi(a)=a$, a σταθερό σημείο
b) $\varphi(b)=b$, b σταθερό σημείο
c) $\varphi(a)>a$ και $\varphi(b)<b$

Θεωρώ $g(x)=\varphi(x)-x$. Τότε η $g(x)$ είναι συνεχής

$$\left.\begin{array}{l} g(a)=\varphi(a)-a>0 \\ g(b)=\varphi(b)-b<0 \end{array}\right\} \text{ άρα } \exists x^* \in [a,b] : g(x^*)=0 \Rightarrow \varphi(x^*)=x^*$$

Συνθήκη Lipschitz: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Τότε η $\varphi: I \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz, αν $\exists L \geq 0 : \forall x,y \in I$, $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq L|x-y|$

· Παρατήρηση: Αν $0 \leq L < 1$ η φ καλείται συστολή στο διάστημα I

· Από τη συνθήκη αυτή έπεται η συνέχεια της φ.

· Έστω $[a,b]$ κλειστό και φραγμένο διάστημα. Τότε αν $\varphi \in C[a,b]$, τότε η φ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz με $L=\max\limits_{a\leq x\leq b}\{|\varphi'(x)|\}$ $\quad \varphi'=\frac{dy}{dx}$

Απόδειξη: αν $x \neq y$ από το θεώρημα μέσης τιμής

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \Rightarrow |\varphi'(\xi)|=\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right|$$

και $|\varphi'(\xi)| \leq \max\limits_{a\leq \xi\leq b}\{|\varphi'(\xi)|\}$

Θεώρημα συστολής:

- Έστω $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ μια συστολή με σταθερά L $(0<L<1)$. Τότε η φ έχει στο $[a,b]$ μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή

$$\exists!\ x^* \in [a,b] : \varphi(x^*) = x^*$$

- Για τυχαία αρχική τιμή $x_0 \in [a,b]$ η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ είναι καλά ορισμένη, συγκλίνει στο x^* και ισχύουν οι εκτιμήσεις

1. $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|$
2. $|x_n - x^*| \leq \dfrac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$
3. $|x_n - x^*| \leq L$

Απόδειξη

Μοναδικότητα σταθερού σημείου

Έστω $x^*, y^* \in [a,b]$, $x^* \neq y^*$ και $\begin{cases} \varphi(x^*) = x^* \\ \varphi(y^*) = y^* \end{cases}$

Αφαιρώ κατά μέλη $\varphi(x^*) - \varphi(y^*) = x^* - y^* \Rightarrow$

$$\underbrace{|\varphi(x^*) - \varphi(y^*)|}_{\leq L|x^*-y^*|} = |x^* - y^*| \leq L|x^*-y^*| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x^*-y^*| \leq L|x^*-y^*|$$

Δλδ $L|x^*-y^*| < |x^*-y^*|$ άτοπο
$L<1$

1. $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|$

Έχουμε $x_0 \in [a,b]$ και $x_1 = \varphi(x_0)$ ($x_{n+1} = \varphi(x_n)$)
συνεπώς η ακολουθία επαγωγικά είναι καλά ορισμένη
(καλά ορισμένη: $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $x_n \in [a,b]$) Τότε
$x_n - x^* = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*) \Longrightarrow |x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)|$

$\leq L |x_{n-1} - x^*|$

Επαγωγικά $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|$